Лекция 8. Оконное преобразование Фурье. Вейвлет преобразование.

Рассмотрим часто применяемое на практике понятие оконного преобразования Фурье. Для него определяется функция окна

$$g(t) : \operatorname{supp} g(t) \subset [-\Omega, \Omega].$$

Тогда оконным преобразованием Фурье является функция преобразования Фурье от произведения исходной функции на оконную функцию:

$$\widehat{f}_{ок} = F\left(f(x) \cdot g(x - x_0)\right).$$

Оконная функция, как правило, имеет вид финитной плоской «шапочки», локализованной в окрестности x_0.
В более общем виде рассматривается преобразование Фурье функции

$$g^{\omega,x0}\cdot f(x)=f(x)e^{i\omega x}g(x-x_0):$$

$$(T_{ок}f)(\omega,x_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\exp(-i\omega x)g(x-x_0)dx$$

Часто берут $\omega=m\,\omega_0$, а $x_0=nt_0$, тогда $(T^{ок}f)=(T^{ок}f)_{m,n}$.

Оконное преобразование Фурье имеет следующие недостатки:

Для участков функции с разной преобладающей частотой должны использоваться разные окна, но мы не можем это обеспечить. Недостатки оконного преобразования Фурье преодолеваются с применением вейвлет-преобразования.

Понятие вейвлета.

Функция $\psi(t)$ образует материнский вейвлет, если она хорошо локализована по пространству. Например, $\psi(t)=1/(1+|t|^{1+\alpha})$ –хорошо локализованная по пространству и по частоте функция при изменении t.

Функция $\psi(t) = (1-t^2)\exp(-t^2/2)$ была исторически первым вейвлетом, который был применен для анализа сигнала.

Если рассмотреть параметрическое семейство фукций $\psi_a(t)=\psi(t/a)$ – тогда мы получим сужение или расширения функции в зависимости от значения a.

Если теперь введем коэффициент сдвига b, то получим двухпараметрическое семейство функций $\psi((t-b)/a)$.

По аналогии с оконным преобразованием Фурье, для того, чтобы функция была вейвлетом, она должна удовлетворять ряду требований:

1. ψ(t), равно как и ψ((t-b)/a) должны принадлежать $L_2(R)$.

2. Пусть $\|\psi\|_{L_2} = 1$ потребуем, что ψ((t-b)/a) также были нормированы:

$$\left\|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi\left(\tfrac{t-b}{a}\right)\right|^2 dt = \left|\frac{t-b}{a} = s, dt = ads\right| = a\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(s)|^2 ds = a\|\psi\|^2$$

Вейвлет $\psi^{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\tfrac{t-b}{a}\right)$

Сформулируем свойства вейвлетов:

1. Локализация – в частотном и временном пространстве, т.е. и ψ(t) и $\hat{\psi}(t)$ должны быть хорошо локализованы.
2. Инвариантность относительно масштабирования – растяжения и сжатия . Если вместо параметра а берем а/2, то в частотном пространстве должно быть $\xi \to 2\xi$.
3. ψ(t) должна быть элементом $L_2(R)$.
4. $$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|}{|\xi|} d\xi < \infty$$
5. Правило дифференцирования вейвелет-преобразования.
6. Аналог теоремы Парсеваля.